

Title	集合函数列の一性質（Ⅱ）
Author(s)	黒崎, 達
Citation	全国紙上数学談話会. 2(14) p.505-p.508
Issue Date	1949-05-30
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75287
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

153 集合函数列の一性質 (II)

(山梨工専) 黒 崎 達 (4.15)

§ 3. 今度は測度が定義されてゐる空間に於ける集合函数について考えて見たい。前回の設話のはじめに述べた σ -Körper \mathfrak{K} と この分では有限測度の可測集合 E の可測な部分集合のつくる σ -Körper とする。以下、集合 X の測度を $\mu(X)$ とかく。

この \mathfrak{K} で定義された σ -加法的集合函数 $\psi(X)$ は絶対連続な集合函数 $\psi(X)$ 及び 特異な集合函数 $\phi(X)$ の和として表はされ $\psi(X)$ 及び $\phi(X)$ も σ -加法的である。而して $\psi(X)$ に対して $\mu(H) = 0$ なる一集合 H が確定して、 $E - H \in \mathfrak{K}$ とかけば

$$\psi(X) = \psi(X \cap CH)$$

$$\phi(X) = \psi(X \cap H), \quad \phi(X \cap CH) = 0.$$

である。以下、 $\psi(X_n)$ についても同様の記号によることにする。

定理 4.

$X \in \mathcal{H}$ に対して常に $\Phi(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(X)$ $|\Phi(X)| < \infty$ ならば

$$\Psi(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(X), \quad \Theta(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(\lambda).$$

である.

(証明).

$$\begin{aligned} \Theta(X) &= \Phi(X \cap H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(X \cap H) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(X \cap H) \dots \dots \dots (5.1) \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} \Theta_n(X) &= \Phi_n(X \cap H_n) = \Phi_n(CH \cap X \cap H_n) + \Phi_n(H \cap X \cap H_n) \\ &= \Phi_n(CH \cap X \cap H_n) + \Theta_n(H \cap X) \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i - H$ とおけば $\mu(A) = 0$ であるから

$$\Phi_n(A \cap X) = \Theta_n(A \cap X) = \Phi_n(CH \cap X \cap H_n)$$

一方 $\Phi(A \cap X) = \Theta(A \cap X) = \Phi(A \cap X \cap H) = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(CH \cap X \cap H_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(X) = \Theta(X)$$

従って 之と $\Phi(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(X)$ とから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(X) = \Psi(\lambda) \quad (\text{終})$$

§4. 次に E に測度が定義されてゐる可分距離空間の可測集合であつて.

$\mu(E) < \infty$ とする. この空間に於て $\bar{\Psi}_n(X)$ は絶対連続な一加法性集合函数で $X \in \mathcal{H}$ に対して

$$-\infty < \bar{\Psi}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Psi}_n(X) < \infty$$

であるとする. 尚、以下に於て $D\bar{\Psi}(x)$ とおけば之は $\bar{\Psi}(X)$ の点 x に於ける *derivative in abstract space* ¹⁾ を意味するものとする.

定理 5.

$\mu(A) > 0$ $A \in \mathcal{R}$ なる 集合 A に於て $\bar{\mu}(x)$ が 恒等的に 0 である場合、 $X \subset A$, $x \in \mathcal{R}$ に対して つねに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}_n(x) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}_n^-(x) = 0$$

である場合には $\{D\bar{\mu}_n(x)\}$ が A に於て 0 に漸近収斂することが必要十分条件である。

証明は直接にも出来るが 吉田氏: 線形作用素 p. 3 によれば簡単である。

定理 6.

$\bar{\mu}(x)$ は $\mu(x) > 0$ なる 集合 X に於て 恒等的に 0 になることはないとする。この場合、殆んどすべての $x \in X$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D\bar{\mu}_n(x) \geq 0 \quad \text{か又は} \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} D\bar{\mu}_n(x) \leq 0$$

であるならば

$$\bar{\mu}^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}_n^+(x), \quad \bar{\mu}^-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}_n^-(x)$$

が成り立つ。

(証明)

$$\bar{\mu}(x) = \int_x D\bar{\mu}(x) dx, \quad \bar{\mu}_n(x) = \int_x D\bar{\mu}_n(x) dx$$

とかける。今

$$A_k = \{x; x \in X, D\bar{\mu}_n(x) \geq 0, n \geq k\};$$

$$B_k = \{x; x \in X, D\bar{\mu}_n(x) \leq 0, n \geq k\}$$

とおけば $A_k \subset A_{k+1}$, $B_k \subset B_{k+1}$ であって、 A_k の殆んどすべての点で $D\bar{\mu}(x) = 0$, B_k の殆んどすべての点で $D\bar{\mu}(x) \leq 0$ である。

上の手から

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}_n^+(A_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}_n(A_k) = \bar{\mu}(A_k) \\ &= \bar{\mu}^+(A_k) \cdots \cdots (4.1) \end{aligned}$$

1) S. Saks. *ibid.*

次に、 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B$ とおけば

$$A \supset Y \quad \text{ならば} \quad \bar{\mu}(Y) \geq 0$$

$$B \supset Y \quad \text{ならば} \quad \bar{\mu}(Y) \leq 0$$

であるから、 $A \subset P \cap X$, $B \subset N \cap X$ である。(P, N は
前回定義した果合)

然るに 假設により $\mu(X - A \cup B) = 0$ であるから

$$A = P \cap X, \quad B = N \cap X$$

であると考えてよい。さて (4.1) によれば任意の正整数 k に対して

$$\lim \bar{\mu}_n^+(A_k) = \bar{\mu}^+(A_k)$$

正数 ε に対して 正数 δ が存在して、 $\mu(Y) < \delta$ ならば

$$|\bar{\mu}^+(Y) - \bar{\mu}_n^+(Y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

なることが $\bar{\mu}(X)$ 及び $\bar{\mu}_n(X)$ の一様絶対連続性から云はれる。又この
 δ に対して正整数 m を、 $\mu(X - A_m \cup B_m) < \delta$ である様に とる
ことが出来る。従って

$$|\bar{\mu}^+(X - A_m \cup B_m) - \bar{\mu}_n^+(X - A_m \cup B_m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

上のようにとられた ε と m に対し 正整数 n_0 が存在して、 $n \geq n_0$

$$\text{ならば} \quad |\bar{\mu}_n^+(A_m) - \bar{\mu}^+(A_m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

即ち、 $n \geq n_0$ ならば

$$|\bar{\mu}_n^+\{X - (X - A_m)\} - \bar{\mu}^+\{X - (X - A_m)\}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\bar{\mu}_n^+(X) - \bar{\mu}^+(X)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\bar{\mu}^+(X - A_m) - \bar{\mu}_n^+(X - A_m)|$$

然るに $\bar{\mu}^+(B_m) = \bar{\mu}_n^+(B_m) = 0$ であるから

$$|\bar{\mu}_n^+(X) - \bar{\mu}^+(X)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\bar{\mu}^+(X - A_m \cup B_m) - \bar{\mu}_n^+(X - A_m \cup B_m)|$$

即ち、

$$\bar{\mu}^+(X) = \lim \bar{\mu}_n^+(X)$$

$\bar{\mu}^-(X)$ についても同様。

(終)